热扩散方程

传热过程

传热(heat transfer)过程是由于温差而产生的热能交换过程, 又称热传递。传热有三种基本模式, 即: 热传导(heat conduction)、热对流(heat convection)和热辐射(heat radiation)。

热传导是指物体在无相对位移的情况下，物体内部具有不同温度、或者不同温度的物体直接接触时所发生的热能从高温向低温部分的转移过程。固体中的热传导是源于晶格的振动(声子)和电子运动。液体和气体中的热传导是源于分子的动能交换。

热对流是指当物体暴露于温度与物体温度不同的移动流体中时，流体就会从物体带走能量或向物体传递能量的过程。

热辐射是指物体用电磁辐射的形式把热能向外散发的传热方式。这种能量的散发是由于组成物质的原子或分子中电子排列位置的改变所造成的。

实际的传热过程一般是几种传热方式并存，如煮开水的过程就是辐射、对流和传导三种传热方式并存。 不同的传热方式遵循不同的传热规律。为了分析方便，人们在传热研究中把三种传热方式分开来考虑，然后再加以综合。下面我们只研究热传导过程。

热传导的傅立叶定律

温度梯度是热传导的驱动力。 温度梯度与热能交换的关系由热传导的傅立叶定律给出:

$$\vec{q}(\vec{r},t) = -\kappa\nabla_{\vec{r}}T(\vec{r},t) = -\kappa\left(\vec{\imath}\frac{\partial T}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial T}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial T}{\partial z}\right) \qquad (1)$$

这里$\vec{q}(\vec{r},t)$是热通量(heat flux)，单位是W/m^2; κ是热导率(thermal conductivity)，又称导热系数, 单位是$W/m\cdot K$; T是温度，单位是K。表 1 列出了一些材料的导热系数。

表 1: 一些材料的热导率。

Materials	$\kappa(W/m\cdot K)$
Copper	401
Allum	237
Carbon Steel	60.5
Stainless Steel	15.1
Glass	1.4
Water	0.61
Oil	0.15
Air	0.026

控制体积中的能量守恒

考虑如图 1 所示的小平行六面体组成的控制体积$dV = dxdydz$。 E_{in} 表示热能进入dV的速率; E_{out} 表示热能离开dV的速率; E_g 表示dV中产生热能的速率; E_{st} 表示热能储存在dV中的速率。 根据热力学第一定律, 在控制体积dV中的能量守恒, 即,

$$E_{in} - E_{out} + E_g = E_{st} \tag{2}$$

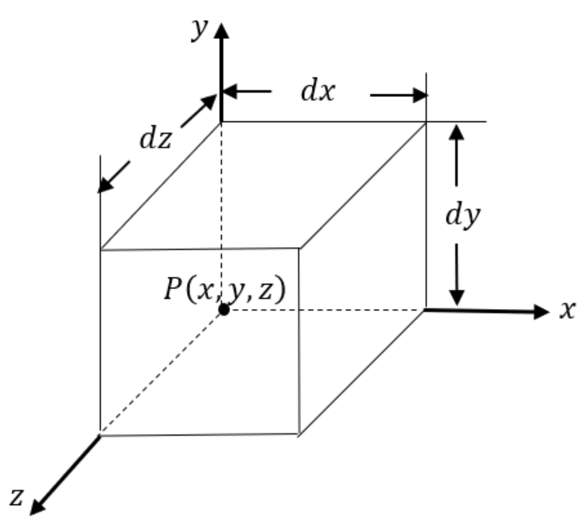

图 1: 控制体积示意图。

热扩散方程

在如图 1 所示的控制体积$dV = dxdydz$中, 我们可以假设物质没有相变化和化学变化。 设$1kg$均相物质温度升高$1K$所需的热量为c_p, 即比热容(specific heat)为c_P, 设物质的密度是 ρ, 则热量在dV中的储存率为

$$E_{st} = \rho c_P \frac{\partial T}{\partial t} dV$$

设 g 表示每秒每体积产生的能量，则在体积dV中产生热能的速率为

$$E_g = gdV$$

设q_x为x方向的能量传递速率，单位为J/s，即W，则由傅立叶定律,

$$q_x = -\kappa dydz \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{和} \quad q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx$$

所以,

$$q_{x+dx} - q_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x}\right) dV$$

同样地,

$$q_{y+dy} - q_y = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y}\right) dV$$

$$q_{z+dz} - q_z = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial z}\right) dV$$

于是

$$E_{in} - E_{out} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x}\right) dV + \frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y}\right) dV + \frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial z}\right) dV$$

根据能量守恒定律, 我们得出热扩散方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial z}\right) + g = \rho c_P \frac{\partial T}{\partial t} \tag{3}$$

当 $g = 0$ 且 κ 为常数时,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta T \tag{4}$$

这里$\alpha \equiv \frac{\kappa}{\rho c_P} \equiv \frac{\text{ability to conduct heat}}{\text{ability to store heat}}$称为热扩散率。 它的单位是$m^2/s$。例如， $\alpha_{\text{alum alloy}} = 7 \times 10^{-5} m^2/s$; $\alpha_{\text{concrete}} = 0.05 \times 10^{-5} m^2/s$。

参考文献

Bergman, Theodore L., Adrienne S. Lavine, Frank P. Incropera, and David P. DeWitt. Introduction to Heat Transfer. 6th Edition, John Wiley & Sons, 2011.