傅里叶变换和拉普拉斯变换

傅里叶变换

若函数$f(x)$的傅里叶变换为:

$$F(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\xi x}dx \tag{1}$$

则$f(x)$可以通过逆傅里叶变换得到:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi)e^{i\xi x}d\xi \tag{2}$$

拉普拉斯变换

傅里叶变换有其局限性，例如不适用于解齐次方程

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}-y(t)=0$$

因为该方程的通解是$y(t)=c_1e^t+c_2e^{-t}$，但e^t和e^{-t}的傅里叶变换不存在。在这种情况下，我们可以将傅里叶变换应用于修改后的函数

$$Y(t)=y(t)e^{-\gamma t}H(t)$$

这里 $H(t)$ 是 Heaviside 阶梯函数, 即当$t\geq 0$，$H(t)=1$; 否则，$H(t)=0$。

函数$Y(t)$的傅里叶变换为:

$$\hat{Y}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}Y(t)e^{-i\xi t}dt=\int_{0}^{\infty}y(t)e^{-\gamma t-i\xi t}dt=\int_{0}^{\infty}y(t)e^{-st}dt,\quad s=\gamma+i\xi$$

上述等式的右边项定义为函数$y(t)$ 的拉普拉斯变换:

$$\tilde{y}(s):=\int_{0}^{\infty}y(t)e^{-st}dt \tag{3}$$

函数$\hat{Y}(\xi)$的逆傅里叶变换为:

$$Y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{Y}(\xi)e^{i\xi t}d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{y}(\gamma+i\xi)e^{i\xi t}d\xi \tag{4}$$

当$t \geq 0$, 等式 (4) 变成

$$y(t)e^{-\gamma t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}\,(\gamma + i\xi)e^{i\xi t}d\xi$$

即,

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}\,(\gamma + i\xi)e^{(\gamma + i\xi)t}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \tilde{y}\,(s)e^{st}ds \qquad (5)$$

上式为函数$y(t)$ 的逆拉普拉斯变换。