DOI: 10.12012/1009-1327(2017)01-0001-05 **文献标识码:** A

阳 - 朱解决的迁移算子谱理论中的一个公开问题

匡志峰

(中国原子能科学研究院, 北京 102413)

摘　要　现任美国核学会院士、密执根大学教授 Edward Larsen 先生在 1979 年的美国《Journal of Mathematical Physics》上发表的论文中赞扬了阳名珠和朱广田先生发表在 1978 年中国科学英文版《Scientia Sinica》上的一项研究成果. 两位先生用独特的方法解决了中子迁移算子谱理论中的一个公开问题, 证明了一类无界非对称线性算子严格占优本征值的存在性, 取得了领先于国际同行的结果. 本文将简单介绍这项研究的背景, 内容和意义, 以此纪念阳先生对发展中子迁移算子谱理论所作出的贡献.

关键词　中子迁移算子谱理论; 无界非对称线性算子; 严格占优本征值

中图分类号　O177.1

An Open Problem Solved by Yang and Zhu in Spectral Theory of Neutron Transport Operators

KUANG Zhifeng

(China Institute of Atomic Energy, Beijing 102413, China)

Abstract　Professors Mingzhu Yang and Guangtian Zhu solved an open problem in the spectral theory of neutron transport operators. They developed a unique method to prove the existence of the strictly dominant eigenvalue of an unbounded asymmetric linear operator arising in the neutron transport theory. Their results were published in Scientia Sinica 21(3): 298-304 (1978). The results were acknowledged by Professor EW Larsen at the University of Michigan, Fellow of American Nuclear Society. In this mini review paper, I would like to introduce the background, content, and meaning of the solved open problem for the appreciation of Professors Yang and Zhu's contributions to the spectral theory of neutron transport operators.

Keywords　spectral theory of neutron transport operators; unbounded asymmetric linear operators; strictly dominant eigenvalues

Chinese Library Classification　O177.1

收稿日期: 2017-01-15

作者简介: 匡志峰 (1965–), 男, 汉, 江西吉安人, 博士, 研究方向: 应用泛函分析, 数学建模和计算, E-mail: zig.kuang@gmail.com, 现在美国空军研究实验室 (The US Air Force Research Laboratory) 从事科研工作.

1 公开问题的提出

在核反应堆脉冲中子试验和核反应堆点火时, 中子在核反应堆中的角密度分布函数满足下面的初边值方程 (1)~(2)[1−2], 在没有中子能从外部进入系统时:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi(\overrightarrow{r},v,\overrightarrow{\Omega},t)}{\partial t}=&-v\overrightarrow{\Omega}\cdot\nabla_{\overrightarrow{r}}\psi(\overrightarrow{r},v,\overrightarrow{\Omega},t)-v\Sigma(\overrightarrow{r},v)\psi(\overrightarrow{r},v,\overrightarrow{\Omega},t)\\&+\int_{E\times V_{\overrightarrow{\Omega}}}k(\overrightarrow{r},v,\overrightarrow{\Omega},v',\overrightarrow{\Omega}')\psi(\overrightarrow{r},v',\overrightarrow{\Omega}',t)dv'd\overrightarrow{\Omega}',\qquad t>0\end{aligned}\tag{1}$$

$$\psi(\overrightarrow{r},v,\overrightarrow{\Omega},0)=\psi_0(\overrightarrow{r},v,\overrightarrow{\Omega})\tag{2}$$

这里 $\psi(\overrightarrow{r},v,\overrightarrow{\Omega},t)$ 是中子的角密度分布函数; $\overrightarrow{r}\in V$ 是中子的位置, V 是三维欧氏空间中一有界的凸的区域, 它的边界面 Γ_V 逐段光滑; $v\in E=[v_m,v_M]$ 是中子的运动速率, $\overrightarrow{\Omega}\in V_{\overrightarrow{\Omega}}$ 是中子的运动方向, $V_{\overrightarrow{\Omega}}$ 是三维欧氏空间中单位球面; $\Sigma(\overrightarrow{r},v)$ 是总宏观截面, $k(\overrightarrow{r},v,\overrightarrow{\Omega},v',\overrightarrow{\Omega}')$ 是能量迁移核.

以 H 表示相域 $V\times E\times V_{\overrightarrow{\Omega}}$ 上绝对值平方可积复值函数全体在通常内积和范数下所组成的空间. 在 H 上定义如下的中子迁移算子:

$$L\bullet\equiv-v\vec{\Omega}\cdot\nabla_{\overrightarrow{r}}\bullet-v\Sigma(\overrightarrow{r},v)\bullet+\int_{E\times V_{\overrightarrow{\Omega}}}k(\overrightarrow{r},v,\overrightarrow{\Omega},v',\overrightarrow{\Omega}')\bullet dv'd\overrightarrow{\Omega}'\tag{3}$$

迁移算子 L 的定义域 $D(L)$ 是由边界条件来决定的. 在没有中子能从 V 的外部进入 V 的条件下, $D(L)$ 可以定义为

$$D(L)\equiv\left\{\psi\in H\mid L\psi\in H;\ \psi(\overrightarrow{r},v,\overrightarrow{\Omega})=0,\ \vec{\Omega}\cdot\overrightarrow{n}<0,\ \overrightarrow{n}\text{ 是 }\overrightarrow{r}\in\Gamma_V\text{ 处外法线单位向量}\right\}$$

因为方程 (1) 的系数与时间无关, 所以可以将时间 t 看成一个参数, 从而将方程 (1)~(2) 等价地表达成如下算子初边值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi(t)}{\partial t}=L\psi(t), & t>0\\ \psi(0)=\psi_0\in D(L)\end{cases}\tag{4}$$

中子迁移理论中的一个中心问题是要求出方程 (1)~(2) 的解, 或至少求出它的渐近解. 自从 20 世纪 50 年代开始, 数学物理学家就一直在探求用不同的方法来解决这个问题 [2−3]. 其中比较有普遍适用性的一种方法叫算子预解式积分法 [4], 或称广义 Laplace 变换法. 对 (4) 作 Laplace 变换 $\widetilde{\psi}(s)=\int_0^\infty dte^{-st}\psi(t)$, 我们得到

$$\widetilde{\psi}(s)=(sI-L)^{-1}\psi_0\tag{5}$$

再对 (5) 作逆 Laplace 变换, 我们得到 (4) 的形式解:

$$\psi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}dse^{st}(sI-L)^{-1}\psi_0\tag{6}$$

为了估算出 (6) 中的积分, 我们要研究算子函数 $f(s)\equiv(sI-L)^{-1}\psi_0$ 在整个复平面上的解析性. 这就是算子谱分析的中心内容和目的. 我们将整个复平面分成互不相交的四部份: (1) 若算子的逆 $(sI-L)^{-1}$ 存在且有界, 则 s 叫算子 L 的正则点; (2) 若算子的逆 $(sI-L)^{-1}$ 不存在, 则 s 叫算子 L 的点谱或本征值; (3) 若算子的逆 $(sI-L)^{-1}$ 存在, 它的值域不等于全空间 H 但在

H 中稠定, 则 s 叫算子 L 的连续谱; (4) 若算子的逆 $(sI-L)^{-1}$ 存在但它的值域在 H 中不稠定, 则 s 叫算子 L 的剩余谱.

迁移算子 L 是在 H 上的闭稠定无界非对称线性算子, 对它的谱分析是非常难的数学问题[5]. 数学家从 20 世纪 50 年代开始对它的谱进行分析, 经过十几年的努力, 在一定的条件下, 得出了下面的一种谱型[6]. 记 $\lambda^* = \min\{v\Sigma(\overrightarrow{r},v)|\ \overrightarrow{r} \in V,\, v \in E\}$.

(i) 假如 $Re\,(\lambda) \le -\lambda^*$, 则 λ 是算子 L 的谱点;

(ii) 存在一常数 c, 假如 $Re\,(\lambda) > c$, 则 λ 是算子 L 的正则点;

(iii) 假如 $-\lambda^* < Re\,(\lambda) \le c$, 则 λ 是算子 L 的正则点或孤立点谱;

(iv) 假如在带 $-\lambda^* < Re\,(\lambda) \le c$ 中存在算子 L 的孤立点谱, 则必存在算子 L 的一个实点谱 λ_0, 它的本征空间可以由唯一的几乎处处非负的本征函数生成, 且当 $Re\,(\lambda) > \lambda_0$ 时, λ 是算子 L 的正则点.

到此为至, 仍有一个非常重要的具有物理意义的问题没有被解决而被当作一个公开问题在 "第四次国际迁移理论大会" 上被提出来了[7]. 这个问题是: 是否存在算子 L 的复本征值 λ 使得 $Re\,(\lambda) = \lambda_0$, $Im\,(\lambda) \ne 0$[7]? 问这个问题的目的是要验证是否存在具有物理意义的严格占优本征值, 在核反应堆物理中称为时间本征值或 α 本征值[1−2]. 满足下面条件的本征值叫严格占优本征值: (1) 它是实数; (2) 它严格大于其它谱点的实部; (3) 它的本征空间可以由唯一的 (除常数因子外) 几乎处处非负的本征函数生成.

2 阳 - 朱对公开问题的解

第一节中的公开问题首先是由 Larsen 和 Zweifel 教授提出的. 他们在 1974 年发表在美国《Journal of Mathematical Physics》的论文中说, "At present we cannot show that complex eigenvalues with real parts equal to λ_0 do not exist"[8]. 在四年后的 1978 年, 阳名珠和朱广田先生在《中国科学》上发表了题为 "含任意空穴的非均匀介质中具连续能量的迁移算子的谱" 的论文[9]. 文章的主要结果为:

结果一. 假定

(1) $k(\overrightarrow{r},v,\overrightarrow{\Omega},v',\overrightarrow{\Omega}') \equiv k(\overrightarrow{r},v,v')$, 即散射裂变各向同性;

(2) 集合 $\{\overrightarrow{r} \in V\,|\Sigma(\overrightarrow{r},v)=0, k(\overrightarrow{r},v,v')=0, v,v' \in E\}$ 的测度大于零;

(3) $v\Sigma(\overrightarrow{r},v)$ 是非负有界可测函数, $0 \le \sum_0 \le v\Sigma(\overrightarrow{r},v) \le \sum_t < \infty$, $\sum_0$, $\sum_t$ 是常数;

(4) $k(\overrightarrow{r},v,v')$ 是非负有界可测函数;

(5) 集合 $\Theta \equiv \{\overrightarrow{r} \in V\,|k(\overrightarrow{r},v,v') > 0, v,v' \in E\}$ 的测度大于零, 且集合 $[V\backslash\Theta]$ 与 Γ_V 之距离大于零;

(6) $0 \le v_m < v \le v_M < \infty$.

在半平面 $Re\,(\lambda) > 0$ 中, 若存在算子 L 的孤立点谱, 则必存在算子 L 的严格占优本征值.

这是一个突破性的结果, 因为在那篇文章中首次用独特的方法证明了若 λ_0 是算子 L 最大的实本征值, 且它的本征空间可以由唯一的 (除常数因子外) 几乎处处非负的本征函数生成, 则不存在算子 L 的复本征值 λ 使得 $Re\,(\lambda) = \lambda_0$, 但 $Im\,(\lambda) \ne 0$. 这正是外国学者想要却不能证明的结果. 阳先生在生前多次提到这个方法是在一次郊游中突然想到的. 可见他对此问题已到了入迷的程度.

三年后, 阳 - 朱在更一般的情况下, 将上述结果中的条件 “若存在算子 L 的孤立点谱” 去掉了, 于 1981 年在《中国科学》上发表了如下完整的结果 [10], 完整地回答了有关中子迁移算子占优本征值的存在性, 为中子迁移算子的谱理论作出了独到的贡献.

结果二. 假定

(1) $v\Sigma(\overrightarrow{r}, v)$ 和 $k(\overrightarrow{r}, v, \overrightarrow{\Omega}, v', \overrightarrow{\Omega}')$ 分别是 $V \times E$ 和 $V \times E \times V_{\overrightarrow{\Omega}} \times E \times V_{\overrightarrow{\Omega}}$ 上的非负有界可测函数, 且 $0 \le v\Sigma(\overrightarrow{r}, v) \le \sum_1(\text{常数}) < \infty$, $0 \le k(\overrightarrow{r}, v, \overrightarrow{\Omega}, v', \overrightarrow{\Omega}') \le k_1(\text{常数}) < \infty$;

(2) 集合 $\Theta \equiv \{\overrightarrow{r} \in V | \Sigma(\overrightarrow{r}, v) = 0, k(\overrightarrow{r}, v, \overrightarrow{\Omega}, v', \overrightarrow{\Omega}') = 0, v, v' \in E, \overrightarrow{\Omega}, \overrightarrow{\Omega}' \in V_{\overrightarrow{\Omega}}\}$ 的测度大于零, 集合 Θ 可由最多是有限多个互相分离的正测集所组成, 且集合 Θ 与 Γ_V 之距离大于零;

(3) 集合 $\Xi \equiv \{\overrightarrow{r} \in V | k(\overrightarrow{r}, v, \overrightarrow{\Omega}, v', \overrightarrow{\Omega}') > 0, v, v' \in E, \overrightarrow{\Omega}, \overrightarrow{\Omega}' \in V_{\overrightarrow{\Omega}}\}$ 的测度大于零, 且包含一闭球, 对球中的任意点 $\overrightarrow{r}$, $k(\overrightarrow{r}, v, \overrightarrow{\Omega}, v', \overrightarrow{\Omega}') \ge k_0(\text{常数}) > 0$, $v, v' \in E, \overrightarrow{\Omega}, \overrightarrow{\Omega}' \in V_{\overrightarrow{\Omega}}$;

则算子 L 必有严格占优本征值.

3 公开问题的意义

3.1 科学意义

因为算子 L 存在严格占优本征值 α, 利用残数定理, (6) 可以进一步写成 [2]

$$\psi(t) = O\left(e^{\alpha t}\right)\psi_0^\alpha + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'-i\infty}^{\gamma'+i\infty} ds e^{st}(sI-L)^{-1}\psi_0,\ \gamma' < \alpha \tag{7}$$

这里 ψ_0^α 是占优本征值所对应的几乎处处为正的本征函数. γ' 是满足 $\alpha > \gamma' >$ 其他谱点的实部. 因此方程 (1)~(2) 的解的大时间渐近行为是由 (7) 中右边的第一项所决定的, 也就是由 α 所决定. α 就是脉冲中子试验所要测的物理量. 它的存在性为实验和计算提供了理论依据 [11].

3.2 国际影响

在 20 世纪 70 年代, 美国, 前苏联, 日本, 欧洲, 印度, 南非等世界各地的科学家都在攻克这一难题 [2,12]. 阳名珠和朱广田两位先生所取得的研究成果马上引起了同行的注意. Larsen 教授在 1979 年发表在美国《Journal of Mathematical Physics》的论文中称赞了他们所取得的成果 [13]. 阳名珠先生也被聘为这一领域的专门期刊《Transport Theory and Statistical Physics》的编委, 第七届国际迁移理论大会四位特邀报告人之一. 1995 年, 作为大会主席在北京成功主持了第十四届国际迁移理论大会.

3.3 对后人的影响

阳先生将他的一生献给了祖国的科学研究和教育事业. 他将科研目标瞄准在世界的前沿, 用坐穿板凳的顽强毅力, 取得了许多国家和世界公认的科研成果. 这里仅介绍了其中的一项. 他讲学的足迹走遍了祖国的东西南北. 他的弟子遍满天下. 他有相敬如宾的妻子和子孙满堂的天伦之乐. 但他常常说他最高兴的时候是与他的学生们在一起. 他与学生同吃同住同行的音容笑貌深深地印在学生的心中.

致谢: 在本文的写作过程中, 得到吴开谡教授和薛雅萍女士的帮助. 作者在此表示感谢.

参 考 文 献

[1] Bell G I, Glasstone S. Nuclear reactor theory[M]. Van Nostrand Reinhold Company, 1970.
[2] Duderstadt J J, Martin W R. Transport theory[M]. Wiley-Interscience, New York, 1979.
[3] Lehner J, Wing G M. Solution of the linearized Boltzmann transport equation for the slab geometry[J]. Duke Math J, 1956, 23(1): 125–142.
[4] Larsen E W, Habetler G J. A functional-analytic derivation of case's full and half-range formulas[J]. Comm Pure Appl Math, 1973, 26: 525–537.
[5] Lehner J, Wing G M. On the spectrum of an asymmetric operator arising in the transport theory of neutrons[J]. Commun Pure Appl Math, 1955, 8: 217–234.
[6] Vidav I. Existence and uniqueness of nonnegative eigenfunctions of the Boltzmann operator[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1968, 22(1): 144–155.
[7] Kaper H G. A collection of problems in transport theory[J]. Transport Theory and Statistical Physics, 1975, 4(3): 125–134.
[8] Larsen E W, Zweifel P F. On the spectrum of the linear transport operator[J]. J Math Phys, 1974, 15(11): 1987–1997.
[9] 阳名珠, 朱广田. 含任意空穴的非均匀介质中具连续能量的迁移算子的谱 [J]. 中国科学, 1978(2): 165–170.
[10] 阳名珠, 朱广田. 具各向异性散射和裂变的中子迁移算子的谱 [J]. 中国科学, 1981(1): 25–30.
[11] Zoia A, Brun E, Malvagi F. Alpha eigenvalue calculations with Tripoli-4®[J]. Annals of Nuclear Energy, 2014, 63: 276–284.
[12] Dorning J. Nuclear reactor kinetics: 1934–1999 and beyond[M]// Nuclear Computational Science: A Century in Review, Springer, NY, 2010.
[13] Larsen E W. The spectrum of the multigroup neutron transport operator for bounded spatial domains[J]. J Math Phys, 1979, 20: 1776–1782.